अध्याय 6

रेखाएँ और कोण

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

पूरक कोण, संपूरक कोण, आसन्न कोण, रैखिक युग्म, शीर्षाभिमुख कोण।

- यदि एक किरण एक रेखा पर खड़ी हो तो इस प्रकार बने दोनों आसन्न कोण संपूरक होते हैं तथा इसका विलोम।
- यदि दो रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं तो शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं।
- यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करती है, तो
  - (i) संगत कोण बराबर होते हैं तथा इसका विलोम।
  - (ii) एकांतर अंत:कोण बराबर होते हैं तथा इसका विलोम।
  - (iii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत:कोण संपूरक होते हैं तथा इसका विलोम।
- एक ही रेखा के समांतर दो रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।
- त्रिभुज के कोणों का योग 180° होता है।
- त्रिभुज का एक बहिष्कोण दोनों संगत अंत: अभिमुख कोणों के योग के बराबर होता है।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

सही उत्तर लिखिए –

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करने वाली एक तिर्यक रेखा के एक ही ओर के दोनों अंत:कोण 2 : 3 के अनुपात में हैं, तो दोनों कोणों में बड़ा कोण है

(A) 54° (B) 108° (C) 120° (D) 136°

हल : उत्तर (B)

प्रश्नावली 6.1

निम्नलिखित प्रश्नों के सही उत्तर लिखिए –

1. आकृति 6.1 में, यदि AB || CD || EF, PQ || RS, ∠RQD = 25° और ∠CQP = 60° है, तो ∠QRS बराबर है

(A) 85° (B) 135°
(C) 145° (D) 110°

आकृति 6.1

2. यदि किसी त्रिभुज का एक कोण अन्य दो कोणों के योग के बराबर हो, तो वह त्रिभुज है एक

(A) समद्विबाहु त्रिभुज
(B) अधिककोण त्रिभुज
(C) समबाहु त्रिभुज
(D) समकोण त्रिभुज

3. एक त्रिभुज का एक बहिष्कोण 105° है तथा उसके दोनों अंतः विपरीत कोण बराबर हैं। इनमें से प्रत्येक बराबर कोण है

(A) $37\frac{1}{2}^\circ$ (B) $52\frac{1}{2}^\circ$ (C) $72\frac{1}{2}^\circ$ (D) 75°

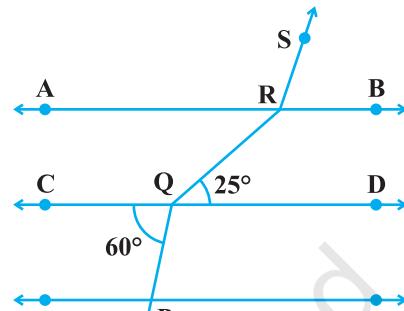
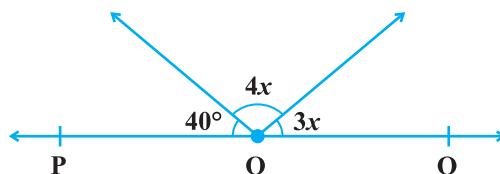
4. किसी त्रिभुज के कोणों का अनुपात 5 : 3 : 7 है। वह त्रिभुज है एक

(A) न्यूनकोण त्रिभुज (B) अधिक कोण त्रिभुज
(C) समकोण त्रिभुज (D) समद्विबाहु त्रिभुज

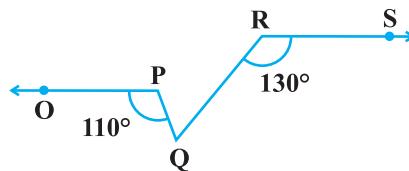
5. यदि किसी त्रिभुज का एक कोण 130° है, तो अन्य दोनों कोणों के समद्विभाजकों के बीच का कोण हो सकता है

(A) 50° (B) 65° (C) 145° (D) 155°

6. आकृति 6.2 में, POQ एक रेखा है। x का मान है

(A) 20° (B) 25° (C) 30° (D) 35°

आकृति 6.2

7. आकृति 6.3 में, यदि $OP \| RS$, $\angle OPQ = 110°$ और $\angle QRS = 130°$ है, तो $\angle PQR$ बराबर है

(A) 40° (B) 50° (C) 60° (D) 70°

आकृति 6.3

8. एक त्रिभुज के कोण 2 : 4 : 3 के अनुपात में हैं। त्रिभुज का सबसे छोटा कोण है

(A) 60° (B) 40° (C) 80° (D) 20°

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : मान लीजिए कि OA, OB, OC और OD वामावर्त दिशा में ऐसी किरणें हैं कि $\angle AOB = \angle COD = 100°$, $\angle BOC = 82°$ तथा $\angle AOD = 78°$ है। क्या यह कहना सत्य है कि AOC और BOD रेखाएँ हैं।

हल : AOC एक रेखा नहीं है, क्योंकि $\angle AOB + \angle COB = 100° + 82° = 182°$ है, जो 180° के बराबर नहीं है। इसी प्रकार, BOD भी एक रेखा नहीं है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करती है कि इसके एक ही ओर के दोनों अंत:कोण बराबर हैं। क्या दोनों रेखाएँ सदैव समांतर होंगी? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

हल : व्यापक रूप में, दोनों रेखाएँ समांतर नहीं होंगी क्योंकि दोनों बराबर कोणों का योग सदैव 180° नहीं होगा। ये रेखाएँ तभी समांतर होंगी जब दोनों बराबर कोण 90° हों।

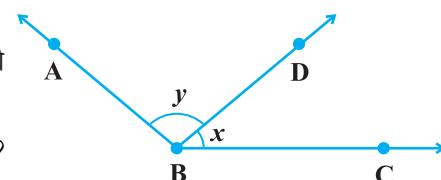
प्रश्नावली 6.2

1. आकृति 6.4 में, $x + y$ के किस मान के लिए ABC एक रेखा होगी? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

आकृति 6.4

2. क्या किसी त्रिभुज के सभी कोण 60° से कम हो सकते हैं? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

3. क्या किसी त्रिभुज के दो अधिक कोण हो सकते हैं? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

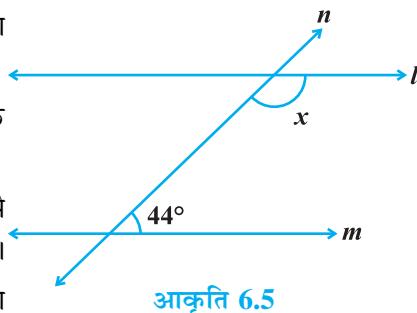
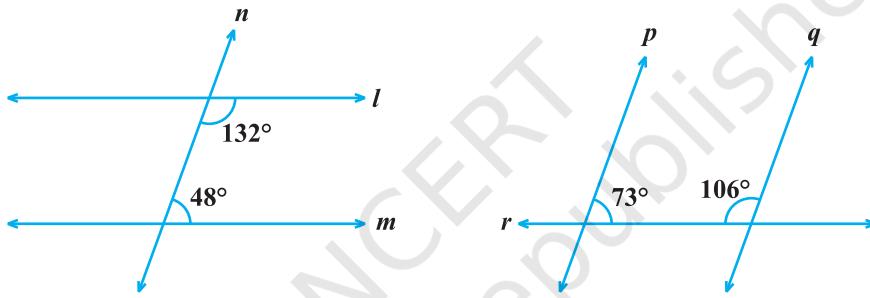
4. कोणों 45°, 64° और 72° वाले कितने त्रिभुज खींचे जा सकते हैं? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

5. कोणों 53°, 64° और 63° वाले कितने त्रिभुज खींचे जा सकते हैं? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

6. आकृति 6.5 में, x का वह मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए l और m समांतर होंगे।

7. दो आसन्न कोण बराबर हैं। क्या यह आवश्यक है कि ये दोनों कोण समकोण हों? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

8. यदि दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से बना एक कोण समकोण है, तो अन्य तीन कोणों के बारे में आप क्या कह सकते हैं? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

आकृति 6.5

9. आकृति 6.6 में, कौन-सी दो रेखाएँ समांतर हैं और क्यों?

आकृति 6.6

10. दो रेखाएँ l और m एक ही रेखा n पर लंब हैं। क्या l और m परस्पर लंब हैं? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

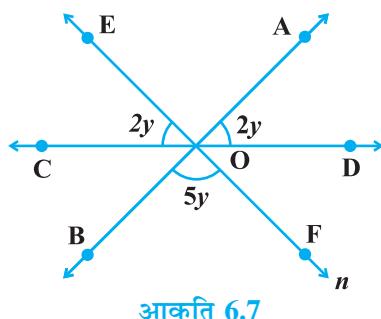
(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : आकृति 6.7 में, तीन रेखाएँ AB, CD और EF बिंदु O पर संगामी हैं। y का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\angle AOE = \angle BOF = 5y$
(शीर्षाभिमुख कोण)

साथ ही, $\angle COE + \angle AOE + \angle AOD = 180°$

इसलिए, $2y + 5y + 2y = 180°$

या, $9y = 180°$, जिससे $y = 20°$ प्राप्त होता है।

आकृति 6.7

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : आकृति 6.8 में, $x = y$ और $a = b$ है।
सिद्ध कीजिए कि $l \parallel n$ है।

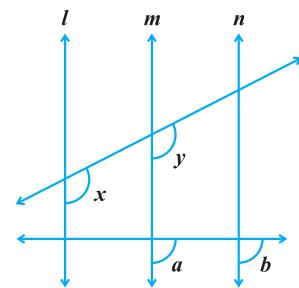
हल : $x = y$ (दिया है)

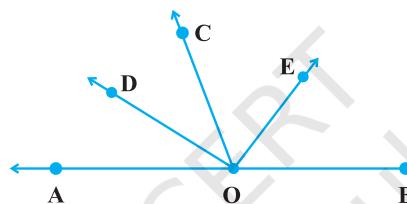
इसलिए, $l \parallel m$ (संगत कोण) (1)

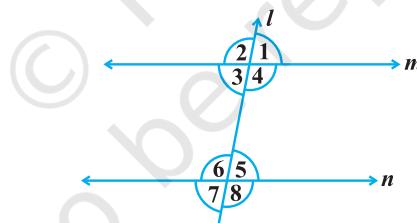
साथ ही, $a = b$ (दिया है)

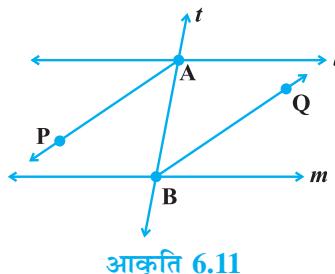
इसलिए, $n \parallel m$ (संगत कोण) (2)

(1) और (2) से, $l \parallel n$ (एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ)

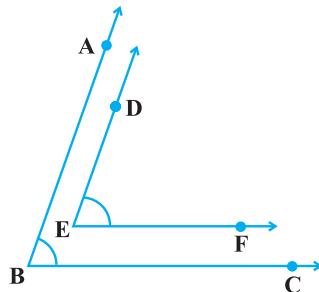
आकृति 6.8

प्रश्नावली 6.3

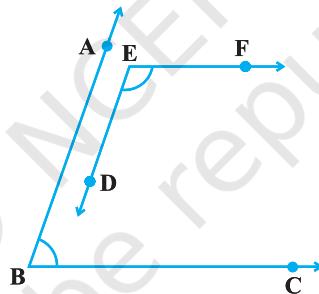
1. आकृति 6.9 में, OD कोण ∠AOC का समद्विभाजक है, OE कोण ∠BOC का समद्विभाजक है तथा OD ⊥ OE है। दर्शाइए कि A, O और B संरेख हैं।

आकृति 6.9

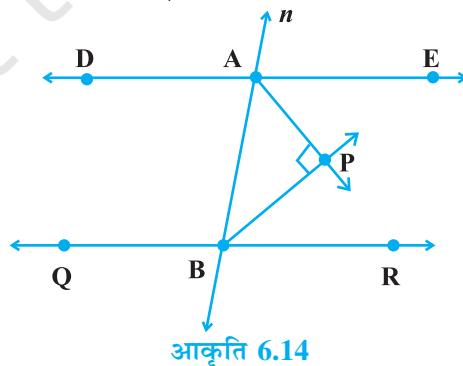
2. आकृति 6.10 में, $\angle 1 = 60°$ और $\angle 6 = 120°$ है। दर्शाइए कि m और n समांतर हैं।

आकृति 6.10

3. AP और BQ उन दो एकांतर अंत:कोणों के समद्विभाजक हैं जो समांतर रेखाओं l और m के तिर्यक रेखा t द्वारा प्रतिच्छेद से बनते हैं (आकृति 6.11)। दर्शाइए कि AP ∥ BQ है।

आकृति 6.11

4. यदि आकृति 6.11 में, एकांतर अंत:कोणों के समद्विभाजक AP और BQ समांतर हैं, तो दर्शाइए कि $l \parallel m$ है।

5. आकृति 6.12 में, BA $\parallel$ ED और BC $\parallel$ EF है। दर्शाइए कि $\angle ABC = \angle DEF$ है।
[**संकेत :** DE को आगे बढ़ाइए ताकि वह BC को, मान लीजिए P पर प्रतिच्छेद करें।]

आकृति 6.12

6. आकृति 6.13 में, BA $\parallel$ ED और BC $\parallel$ EF है। दर्शाइए कि $\angle ABC + \angle DEF = 180°$ है।

आकृति 6.13

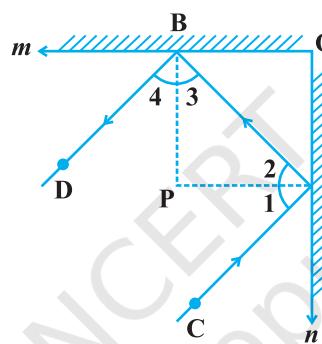
7. आकृति 6.14 में, DE $\parallel$ QR तथा AP और BP क्रमशः कोणों $\angle EAB$ और $\angle RBA$ के समद्विभाजक हैं। $\angle APB$ ज्ञात कीजिए।

आकृति 6.14

8. किसी त्रिभुज के कोणों का अनुपात 2 : 3 : 4 है। इस त्रिभुज के तीनों कोण ज्ञात कीजिए।

9. एक त्रिभुज ABC का कोण A समकोण है। BC पर L एक बिंदु इस प्रकार है कि $AL \perp BC$ है। सिद्ध कीजिए कि $\angle BAL = \angle ACB$ है।

10. दो रेखाएँ क्रमश: दो समांतर रेखाओं पर लंब हैं। दर्शाइए कि ये दोनों रेखाएँ परस्पर समांतर हैं।

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: आकृति 6.15 में, m और n दो समतल दर्पण हैं जो परस्पर लंब हैं। दर्शाइए कि आपतित किरण CA परावर्तित किरण BD के समांतर है।

आकृति 6.15

हल : मान लीजिए कि A और B पर अभिलंब P पर मिलते हैं।

क्योंकि दर्पण परस्पर लंब हैं, इसलिए $BP \parallel OA$ और $AP \parallel OB$ है।

अत:, $BP \perp PA$, अर्थात् $\angle BPA = 90°$

इसलिए, $\angle 3 + \angle 2 = 90°$ (कोण योग गुण) (1)

अत:, $\angle 1 = \angle 2$ और $\angle 4 = \angle 3$ (आपतन कोण=परावर्तन कोण)

अत:, $\angle 1 + \angle 4 = 90°$ [(1) से] (2)

(1) और (2) को जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$$

अर्थात्, $\angle CAB + \angle DBA = 180°$

अत:, $CA \parallel BD$

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।

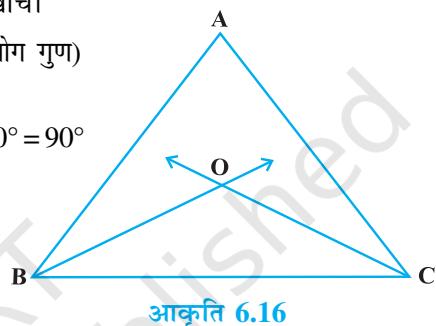
हल : कक्षा IX की गणित पाठ्यपुस्तक में, प्रमेय 6.7 की उपपत्ति देखिए।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : एक त्रिभुज ABC के कोणों B और C के समद्विभाजक परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$ है।

हल : आइए आकृति 6.16 में दर्शाए अनुसार आकृति खींचें।

$\angle A + \angle ABC + \angle ACB = 180°$ (त्रिभुज का कोण योग गुण)

अत:, $\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$

आकृति 6.16

अत:, $\frac{1}{2}\angle A + \angle OBC + \angle OCB = 90°$ (क्योंकि BO और CO क्रमश: $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक हैं) (1)

परंतु $\angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 180°$ (कोण योग गुण) (2)

(2) में से (1) को घटाने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$\angle BOC + \angle OBC + \angle OCB - \frac{1}{2}\angle A - \angle OBC - \angle OCB = 180° - 90°$$

अर्थात्, $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$

प्रश्नावली 6.4

1. यदि दो रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं तो सिद्ध कीजिए कि शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं।

2. ΔABC के अंत:कोण $\angle B$ और बहिष्कोण $\angle ACD$ के समद्विभाजक बिंदु T पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle BTC = \frac{1}{2}\angle BAC$ है।

3. एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि इस प्रकार बने संगत कोणों के युग्म के समद्विभाजक समांतर होते हैं।

4. सिद्ध कीजिए कि एक दिए हुए बिंदु से होकर, हम एक दी हुई रेखा पर केवल एक लंब ही खींच सकते हैं।

[**संकेत :** विरोधाभास द्वारा उपपत्ति का प्रयोग कीजिए।]

5. सिद्ध कीजिए कि दो रेखाएँ जो क्रमशः दो प्रतिच्छेदी रेखाओं पर लम्ब हो, परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं।

[**संकेत :** विरोधाभास द्वारा उपपत्ति का प्रयोग कीजिए।]

6. सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज के कम से कम दो न्यूनकोण अवश्य होने चाहिए।

7. आकृति 6.17 में, $\angle Q > \angle R$, PA कोण $\angle QPR$ का समद्विभाजक है तथा $PM \perp QR$ है। सिद्ध कीजिए कि $\angle APM = \frac{1}{2}(\angle Q - \angle R)$ है।

आकृति 6.17